Universidad Autónoma de Querétaro

Escuela de Bachilleres

Cuadernillo de Ejercicios

Matemáticas V

Docente: M. en D. Ellis Peñaloza Soberanes

Contenido:

Nombre: ____ Exp: ___________

Grupo: ______________ Semestre: ____________________________

I. Operaciones con Funciones

1. Evaluación de funciones. Evaluar, si es posible, la función en los valores dados de la variable independiente, además de simplificar los resultados.

   a. $f(x) = 2x - 3$

   $f(0) =$

   $f(-3) =$

   $f(b) =$

   $f(x-1) =$

   b. $f(x) = \sqrt{x+3}$

   $f(-2) =$

   $f(6) =$

   $f(c) =$

   $f(x+h) =$

   c. $f(x) = \cos 2x$

   $f(0) =$

   $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$

   $f\left(\frac{\pi}{3}\right) =$

d. $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & si \quad x<0 \\ 2x+2 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

$f(-1)=$

$f(0)=$

$f(2)=$

$f(t^2+1)=$

e. $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si \quad x\leq 1 \\ 2x^2+2 & si \quad x>1 \end{cases}$

$f(-2)=$

$f(0)=$

$f(1)=$

$f(a^2+2)=$

f. $f(x)=3x-1$

$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=$

g. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=$$

h. $f(x)=x^3-x$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=$$

2. Completar la siguiente tabla realizando las operaciones indicadas con las funciones dadas, colocar el resultado en la celda correspondiente.

	$(f+g)(x)$	$(f-g)(x)$	$(fg)(x)$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$
a. $f(x)=x$ $g(x)=x^2-1$				
b. $f(x)=\sqrt{x}$ $g(x)=x^2+1$				
c. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ $g(x)=\dfrac{1}{x}$				

d. $f(x)=\sqrt{x}$ $g(x)=4-x^2$				
e. $f(x)=x^2+1$ $g(x)=3x-2$				

3. Completar la siguiente tabla realizando las operaciones indicadas con las funciones dadas, colocar el resultado en la celda correspondiente.

	$(f\circ g)(x)$	$(g\circ f)(x)$	$(f\circ f)(x)$	$(g\circ g)(x)$
a. $f(x)=3x^2-4x$ $g(x)=2x-5$				
b. $f(x)=\frac{1}{x}$ $g(x)=\sqrt{x}$				
c. $f(x)=\frac{1}{x+1}$ $g(x)=\frac{x}{x-2}$				
d. $f(x)=x^2$ $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$				
e. $f(x)=\sqrt{x-4}$ $g(x)=x^2-4$				

4. Dada la función h dada, expresarla como composición de dos funciones f y g.

	$f(x)$	$g(x)$	$(f \circ g)(x)$	$(g \circ f)(x)$
a. $h(x) = (x^2 + 4x - 5)^4$				
a. $h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$				
b. $h(x) = \left(\frac{1}{x-2}\right)^3$				
c. $h(x) = (9 + x^2)^{-2}$				

5. Composición de funciones por partes
   a. Determinar las operaciones $f \circ g$ y $g \circ f$ dadas las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & si \quad x \leq 0 \\ 3x - 8 & si \quad 0 < x < 2 \\ 5 & si \quad x \geq 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x - 1 & si \quad x \leq 0 \\ -1 & si \quad 0 < x < 2 \\ \frac{1}{\mathrm{x}} & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

b. Determinar las operaciones $f \circ g$, $g \circ f$ y $f + g$ dadas las funciones

$$f(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x & si \quad 0 < x < 4 \\ 1\text{-}x & si \quad x \geq 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x)=\begin{cases} x+3 & si \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

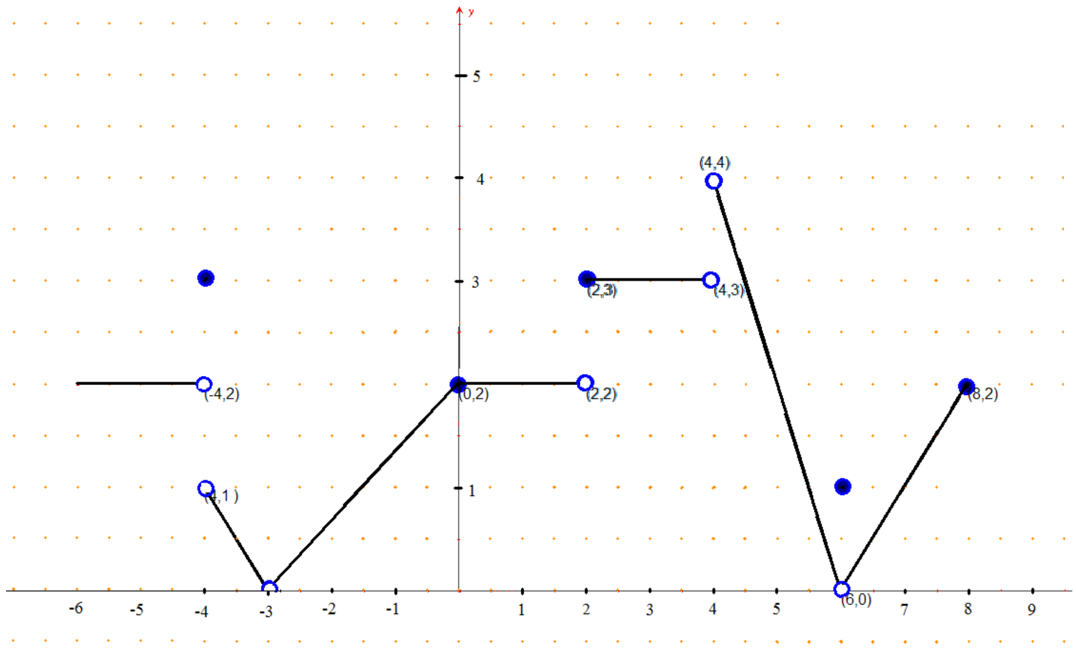
6. Completar la siguiente tabla en base a la información proporcionada.

	f	g	$g \circ f$
a.	$3x+7$		$2x-1$
b.		$\frac{1}{x}$	x
c.	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	
d.		$1+\frac{1}{x}$	x

II. Límites

Limites gráficos

1. Si la grafica de una función f(x) es la siguiente:

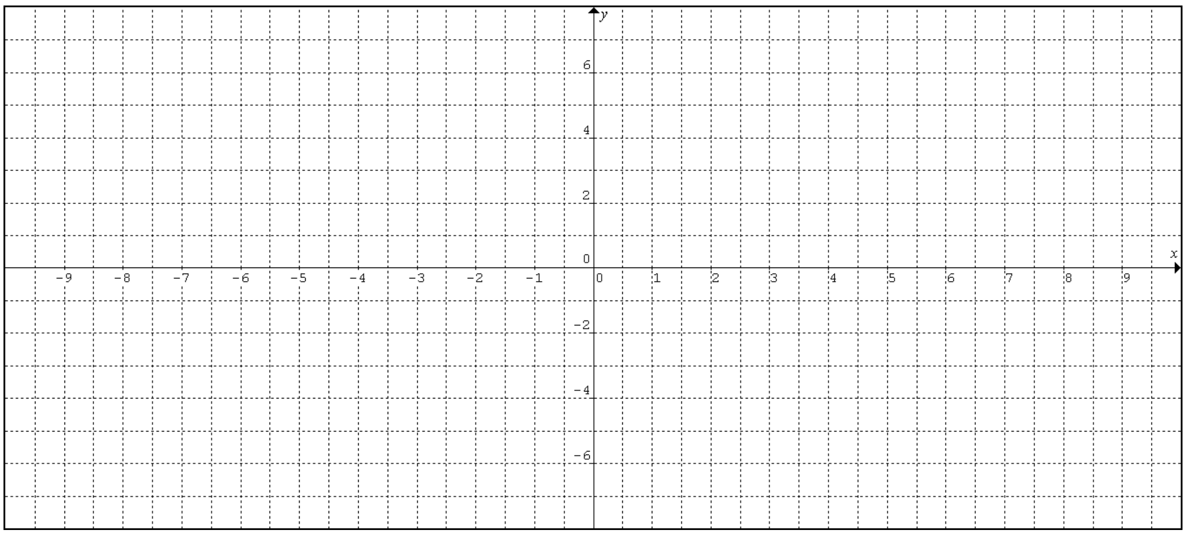


Determinar si las proposiciones que a continuación se tienen son falsas o verdaderas. Si son falsas explicar el porqué.

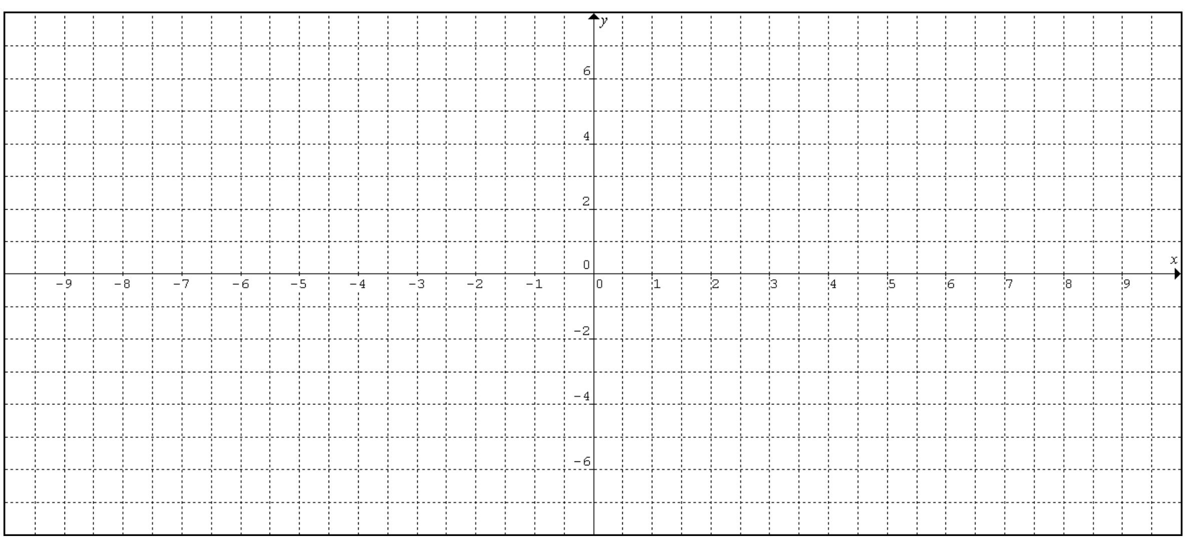
a) $\lim_{x\to -4^+} f(x)=1$	b) $\lim_{x\to -4^-} f(x)=2$
c) $\lim_{x\to -4} f(x)=3$	d) $\lim_{x\to -4} f(x)$ no existe
e) $\lim_{x\to -3^+} f(x)=0$	f) $\lim_{x\to -3^-} f(x)=f(0)$
g) $\lim_{x\to -3} f(x)=0$	h) $\lim_{x\to 0} f(x)=2$
i) $\lim_{x\to -2} f(x)$ no existe	j) $\lim_{x\to -2^-} f(x)=2$
k) $\lim_{x\to -2^+} f(x)=3$	l) $\lim_{x\to 4^-} f(x)=3$
m) $\lim_{x\to 4^+} f(x)=4$	n) $\lim_{x\to 4} f(x)$ no existe
o) $\lim_{x\to 6^-} f(x)=1$	p) $\lim_{x\to 6^+} f(x)=0$

2. Graficar cada una de las siguientes funciones, determinar dominio y rango, así como completar los límites pedidos:

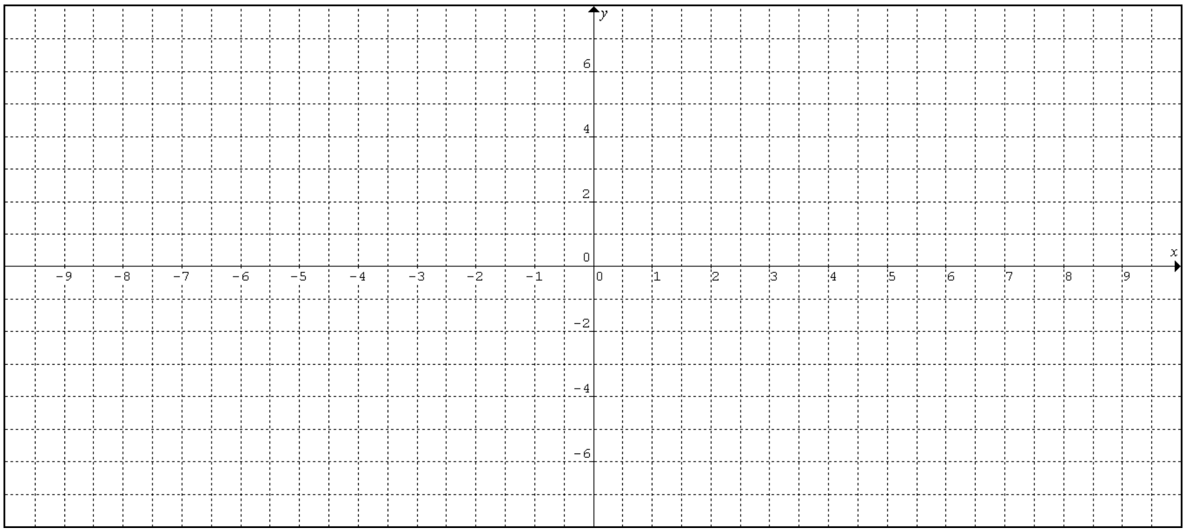
a. $f(x)=\begin{cases} -x & si \quad x<0 \\ 1 & si \quad x=0 \\ x & si \quad x>0 \end{cases}, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x), \quad \lim_{x\to 0^-} f(x), \quad \lim_{x\to 0} f(x)$



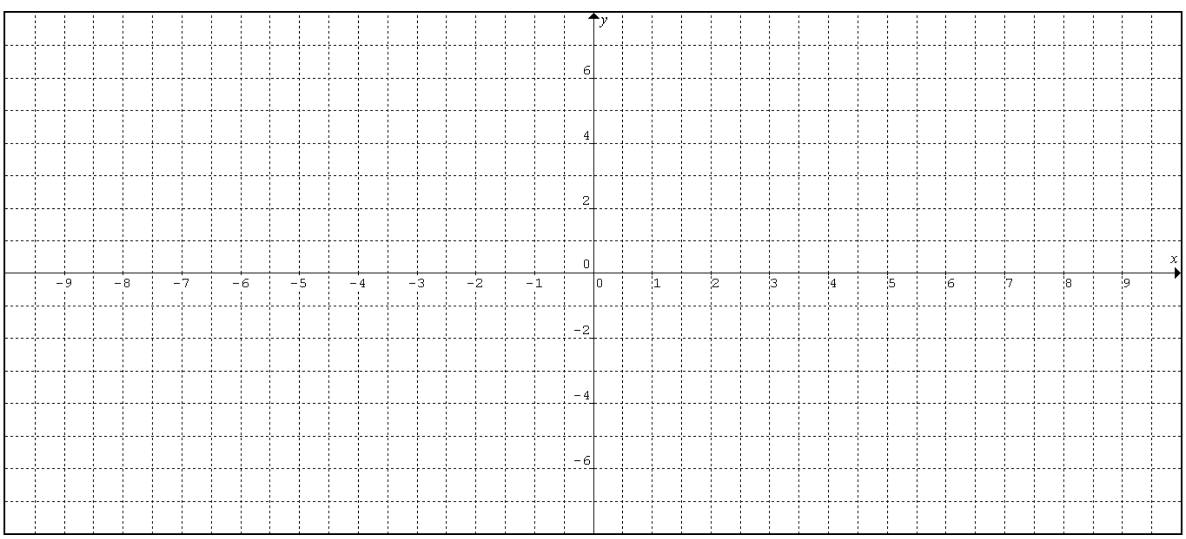
b. $g(x)=\begin{cases} -1 & si \quad x<-1 \\ 0 & si \quad x=-1 \\ 1 & si \quad x>-1 \end{cases}, \quad \lim_{x\to -1^+} g(x), \quad \lim_{x\to -1^-} g(x), \quad \lim_{x\to -1} g(x)$



c. $f(x)=\begin{cases} -1 & si \quad x<-1 \\ 1 & si \quad -1<x<1 \\ -1 & si \quad x>1 \end{cases}$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$



d. $g(x)=\begin{cases} 2x & si \quad x>0 \\ 0 & si \quad x=0 \\ -2x & si \quad x<0 \end{cases}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$



Teoremas de Límites

3. Utilizando los teoremas adecuadamente, justificar el valor para los siguientes límites.
   a. $\lim_{x\to 1}\left(4x^3+3x^2-24x+22\right)=5$

   b. $\lim_{x\to -1}\left(-2x^3+9x+4\right)=-3$

Limites Algebraicos

1. Indicaciones: Determinar, si es posible, el valor para los siguientes límites.

   a. $\lim_{x\to 2}\left(x^2-4x\right)$ Sol: -4

   b. $\lim_{x\to -1}\left(x^3+2x^2-3x-4\right)$ Sol: 0

   c. $\lim_{x\to 1}\frac{(3x-1)^2}{(x+1)^3}$ Sol: $\frac{1}{2}$

   d. $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$ Sol: 0

   e. $\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x^2-1}$ Sol: $\frac{1}{3}$

   f. $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{x^2-x-12}$ Sol: $\frac{1}{7}$

   g. $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$ Sol: 0

   h. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ Sol: -4

   i. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$ Sol: $\frac{1}{2}$

   j. $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$ Sol: $\frac{1}{4}$

   k. $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}$ Sol: $\frac{9}{2}$

   l. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$ Sol: No existe

   m. $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$ Sol: 2x

   n. $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$ Sol: 0

   o. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}$ Sol: No existe

   p. $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$ Sol: 2

   q. $\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$ Sol: 6

2. Determinar adecuadamente el valor de los siguientes límites, si es que estos existen:

a) $\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{3x-2}{x-1}}$

b) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x+4}{2x+5}$

c) $\lim_{x\to 3}\frac{7x^2-9x-4}{\sqrt{2x^2-2}}$

d) $\lim_{x\to -4/3}\frac{1}{\sqrt{9x^2-2x-3}}$

e) $\lim_{x\to 1/2}\frac{1}{3x^2-2x+4}$

f) $\lim_{x\to 1/2}\frac{x^2-\frac{1}{4}}{x-\frac{1}{2}}$

g) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+7x}{x}$

h) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$

i) $\lim_{x\to 0}\frac{(5+x)^{-2}-5^{-2}}{x}$

j) $\lim_{x\to 0}\frac{(16+x)^{-2}-16^{-2}}{x}$

k) $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$

l) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}\right]$

m) $\lim_{x\to 2}\frac{3x-6}{1-\sqrt{4x-7}}$

n) $\lim_{x\to -3}\frac{x-3}{x^2-9}$

ñ) $\lim_{x\to 0}\frac{4x^3-2x^2}{4x^2-2x^3}$

o) $\lim_{x\to -3}\frac{x^3+27}{x+3}$

p) $\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{3}+h\right)^2-\frac{1}{9}}{h}$

q) $\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}+h\right)-\frac{1}{4}}{h}$

r) $\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{3-\sqrt{x+10}}$

s) $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

t) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{3-\sqrt{2x+5}}$

Límites trigonométricos

3. Determinar el valor para cada uno de los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{\sin 7x}=$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 5x}=$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 3x}=$

e) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\cos x}=$

f) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x}=$

g) $\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos^2\frac{1}{2}x}=$

h) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{2x}=$

i) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin 3x}=$

j) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{\sin x}=$

Límites que tienden al infinito

4. Determinar el valor de los siguientes límites.

a. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-2}{9x+7}$ Sol: $\frac{1}{3}$

b. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+2x+1}{6x^2-3x+4}$ Sol: 1

c. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x-2}{4x^3-1}$ Sol: 0

d. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^2+1}$ Sol: No existe

e. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{4x-5}$ Sol: $\frac{1}{2}$

f. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{6+x-3x^2}$ Sol: $-\frac{2}{3}$

g. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+5}$ Sol: 0

h. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+6}{x+1}$ Sol: No existe

i. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+3}{x^2+5x+6}$ Sol: 0

III. Derivadas

1. Derivadas utilizando la definición de límite: Dadas las siguientes funciones, determinar el siguiente límite $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

a. $f(x)=x^2+3x+5$ Sol: $2x+3$

b. $f(x)=\sqrt{5x+1}$ Sol: $\frac{5}{2\sqrt{5x+1}}$

c. $f(x)=\frac{1}{x-2}$ Sol: $-\frac{1}{(x-2)^2}$

d. $f(x)=\frac{2x-3}{3x+4}$ Sol: $\frac{17}{(3x+4)^2}$

Derivada de funciones algebraicas

2. Completar las derivadas de las siguientes expresiones, donde c es una constante, u,v,w funciones y m un número entero:
   a. $\frac{d}{dx}(c)=$
   b. $\frac{d}{dx}(x)=$
   c. $\frac{d}{dx}(x^m)=$
   d. $\frac{d}{dx}(u^m)=$
   e. $\frac{d}{dx}(u+v)=$
   f. $\frac{d}{dx}(cu)=$
   g. $\frac{d}{dx}(uv)=$
   h. $\frac{d}{dx}(uvw)=$
   i. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=$

Derivadas algebraicas

3. Determinar la derivada para las siguientes funciones.
   a. $y=4x-3$
      Sol:
   b. $y=x^2+2x-3$
      Sol:
   c. $y=4+2x-3x^2-5x^3-8x^4+9x^5$
      Sol:
   d. $y=x^2+2x-3$
      Sol:

e. $y = x^5 + 5x^4 - 10x^2 + 6$
Sol:

f. $y = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} =$
Sol:

g. $y = 2x^{1/2} + 6x^{1/3} - 2x^{3/2}$
Sol:

h. $y = \frac{2}{x^{1/2}} + \frac{6}{x^{1/3}} - \frac{2}{x^{3/2}} - \frac{4}{x^{3/4}} =$
Sol:

i. $y = \sqrt[3]{3x^2} - \frac{1}{\sqrt{5x}} =$
Sol:

j. $y = 3x^{1/2} - x^{3/2} + 2x^{-1/3}$
Sol:

k. $y = \frac{1}{2x^2} + \frac{4}{\sqrt{x}} =$
Sol:

l. $y = \frac{1}{x^2}$ Sol: $y' = -\frac{2}{x^3}$

m. $y = \frac{2x-1}{2x+1}$ Sol: $y' = \frac{1}{(2x+1)^2}$

n. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ Sol: $y' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

o. $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}} =$

Sol: $y' = -\dfrac{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x^2}}{x^2}$

p. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2+x}} =$ Sol: $y' = -\dfrac{1}{2\sqrt{(2+x)^3}}$

q. $z(y) = \dfrac{3}{\left(a^2 - y^2\right)^2} =$ Sol: $y' = \dfrac{12y}{\left(a^2 - y^2\right)^3}$

r. $y = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x}$ Sol: $y' = \dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}}$

s. $y = \sqrt{x^2 + 6x + 3} =$ Sol: $y' = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2 + 6x + 3}}$

t. $s(t) = \left(t^2 - 3\right)^4$

Sol:

u. $y = (1 - 5x)^6$

Sol:

v. $y = \left(3x - x^3 + 1\right)^4$

Sol:

w. $y = \left(3 + 4x - x^2\right)^{1/3}$

Sol:

x. $y = x\sqrt{1 - x^2}$

Sol:

y. $y = x\sqrt{3-2x^2}$ Sol: $y' = \dfrac{3-4x^2}{\sqrt{3-2x^2}}$

z. $y = 2x^2\sqrt{2-x}$ Sol: $y' = \dfrac{x(8-5x)}{\sqrt{2-x}}$

5. Determinar la derivada para las siguientes funciones.

a. $y = \left(x^2+4\right)^2\left(2x^3-1\right)^3$
Sol:

b. $y = (x-1)\sqrt{x^2-2x+2}$ Sol: $y' = \dfrac{2x^2-4x+3}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

c. $y = \dfrac{3-2x}{3+2x}$ Sol: $y' = -\dfrac{12}{(3+2x)^2}$

d. $\theta(r) = \dfrac{3r+2}{2r+3}$ Sol: $\dfrac{d\theta}{dr} = \dfrac{5}{(2r+3)^2}$

e. $s(t) = \dfrac{t^2+2}{3-t^2}$ Sol: $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{10t}{\left(3-t^2\right)^2}$

f. $y = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^5$ Sol: $y' = \dfrac{5x^4}{(1+x)^6}$

g. $y = \left(\dfrac{x^3-1}{2x^2+1}\right)^4$ Sol: $y' = \dfrac{36x^2\left(x^3-1\right)^3}{\left(2x^2+1\right)^5}$

h. $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$ Sol: $y' = \dfrac{8x-x^3}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}$

i. $z(w) = \dfrac{w}{\sqrt{1-4w^2}}$ Sol: $\dfrac{dz}{dw} = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1-4w^2\right)^3}}$

j. $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ Sol: $y' = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$

k. $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$ Sol: $y' = \dfrac{1}{4\sqrt{x+x\sqrt{x}}}$

Recta Tangente

6. Determinar el valor de la pendiente de las siguientes curvas en el punto x=1.
   a. $y = 8 - 5x^2$ Sol: $m_T = -10$
   b. $y = \frac{4}{x+1}$ Sol: $m_T = -1$
   c. $y = \frac{2}{x+3}$ Sol: $m_T = -\frac{1}{8}$

7. Calcular la pendiente de las tangentes a la parábola $y = -x^2 + 5x - 6$ en los puntos de intersección con el eje x.

8. Calcular la velocidad de los siguientes movimientos en el instante t=2, se sabe que la función $s(t)$ esta expresada en metros por segundo.
   a. $s(t) = t^2 + 3t$ Sol: 7 m/s
   b. $s(t) = t^3 - 3t^2$ Sol: 0 m/s
   c. $s(t) = \sqrt{t+2}$ Sol: $\frac{1}{4}$ m/s

9. Derivadas de orden superior: Calcular las derivadas indicadas para las siguientes funciones.
   a. $y = 3x^4 - 2x^3 + x - 5$ determinar $y''' =$
      $y' =$
      $y'' =$
      $y''' =$

   b. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$
      $y' =$

      $y'' =$

      $y''' =$

      $y^{(4)} =$

c. $y = \sqrt{2-3x^2}$

$y' =$

$y'' =$

d. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$

$y' =$

$y'' =$

Bibliografía

Ayres, Frank, *Cálculo Diferencial e Integral,* Serie Shaum-Mc Graw Hill

Larson, Roland, *Cálculo y Geometría Analítica,* 6ª Edición, Mc Graw Hill

Leithold, Louis, *El Cálculo*, 7ª Edición, Oxford University Press

Noriega, *Fundamentos de Matemáticas,* Ed. Limusa

Zill, Dennis, *Cálculo con geometría analítica*, Grupo Editorial Iberoamerica